Номинация
«Геометрические миниатюры»

ТЕМА «РЕШЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ МЕТОДОМ ВЗВЕШИВАНИЯ»

РАБОТУ ВЫПОЛНИЛ УЧЕНИК 9 КЛАССА
ТОРОЩИН ЗАХАР СЕРГЕЕВИЧ – TOROSCHIN ZAHAR
163001 Г. АРХАНГЕЛЬСК, УЛ. К. МАРКСА, Д. 13, КВ. 159
ТЕЛЕФОН: +79022857431; E-MAIL: 2012ZAHAR003@MAIL.RU
РУКОВОДИТЕЛЬ РАБОТЫ:
ПАВЛОВА МАРИЯ АЛЕКСАНДРОВНА – PAVLOVA MARIA
РУКОВОДИТЕЛЬ КРУЖКА «ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА»
ДЛЯ 7-9 КЛАССОВ НА БАЗЕ САФУ, ТЕЛЕФОН: +79539380846,
E-MAIL: MARIA070583@MAIL.RU

«МЕТОД ВЗВЕШИВАНИЯ»

- Под методом взвешивания в рамках работы мы понимаем экспериментальный метод взвешивания моделей геометрических фигур.

ВВЕДЕНИЕ

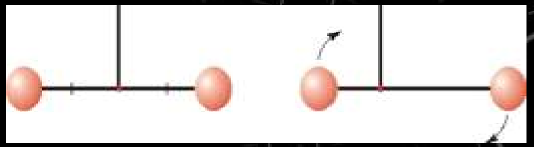
«… Я счел нужным написать тебе и… изложить особый метод, при помощи которого ты получишь возможность находить некоторые математические теоремы. Я уверен, что этот метод будет не менее полезен и для доказательства самих теорем»

Архимед. Послание к Эратосфену

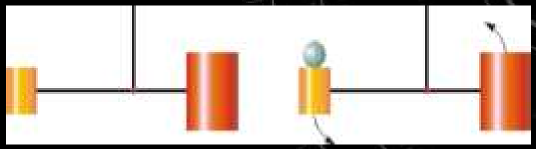
Еще в III веке до н.э. Архимед обнаружил новые математические факты с помощью свойств центра масс. Эти свойства позволяют решать различные задачи геометрии и алгебры.

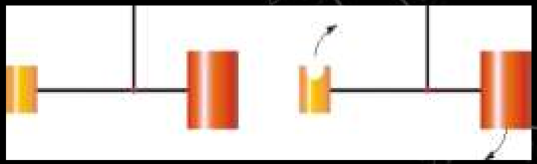
АКСИОМЫ АРХИМЕДА

1. Равные тяжести на равных длинах уравновешиваются, на неравных же длинах не уравновешиваются, но перевешивают тяжести на большей длине.

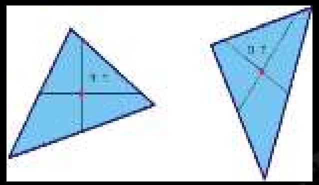


2. Если при равновесии тяжестей на каких-нибудь длинах к одной из тяжестей будет что-нибудь прибавлено, то они не будут уравновешиваться, но перевесит та тяжесть, к которой было прибавлено.

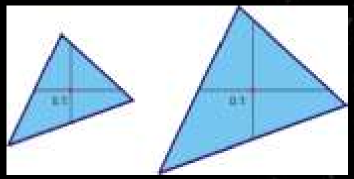




3. Если от данной тяжести будет отнято что-нибудь, то они не будут уравновешиваться, но перевесит та тяжесть, от которой не было отнято.

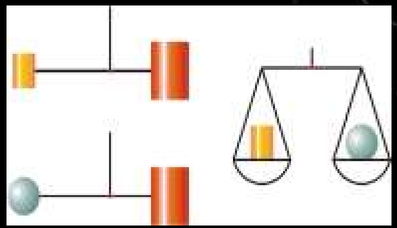


4. При совмещении друг с другом равных и подобных плоских фигур совместятся и их центры тяжести.



5. У неравных же, но подобных фигур центры тяжести будут подобно же расположены.

6. Если величины уравновешиваются на каких-нибудь длинах, то на тех же длинах будут уравновешиваться и равные им [3].

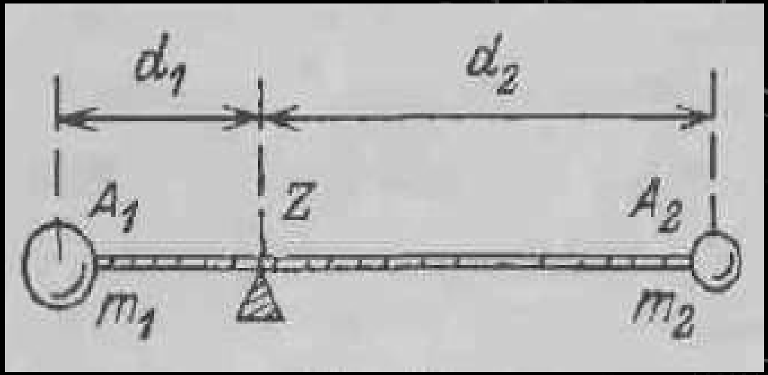


ПРАВИЛО РЫЧАГА АРХИМЕДА

$m_1 d_1 = m_2 d_2$

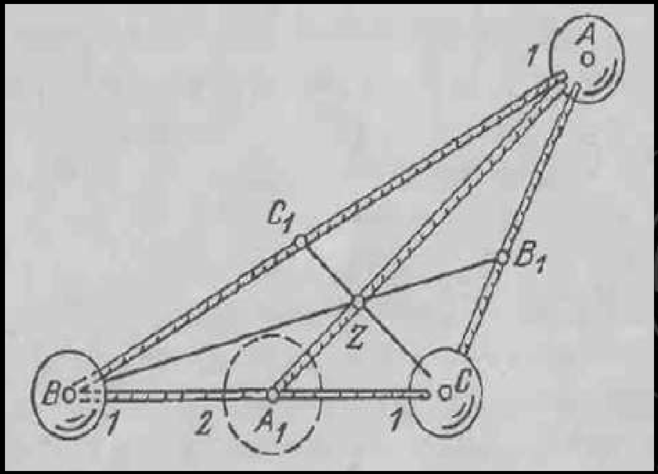
где m_1, m_2 - массы материальных точек,

d_1, d_2 – соответствующие плечи, т.е. расстояния от материальных точек до центра масс.



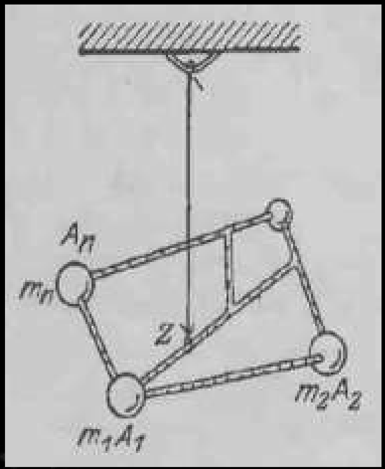
Теорема о медианах:

Три медианы треугольника имеют общую точку, и каждая из медиан делится этой точкой в отношении
2:1, считая от вершины.



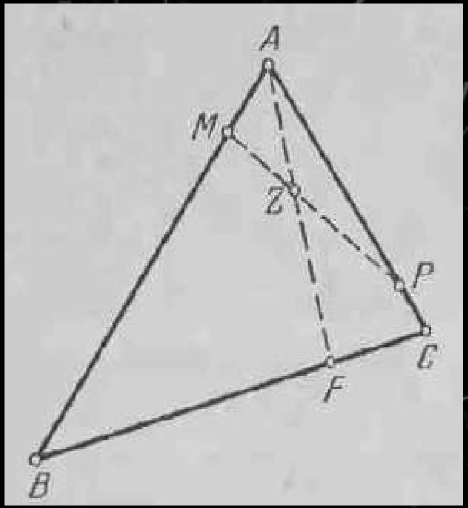
БАРИЦЕНТРИЧЕСКИЙ МЕТОД

Применение к решению геометрических задач понятия центра масс описаны в книге «Геометрия масс» (М.Б. Балк и В.Г. Болтянский). Авторы используют понятие «барицентрического» метода.



Материальная точка – тело, размерами которого можно пренебречь при сравнении их с расстоянием до других тел.
Точка Z – барицентр системы материальных точек, или центр масс.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ БАРИЦЕНТРИЧЕСКИМ МЕТОДОМ

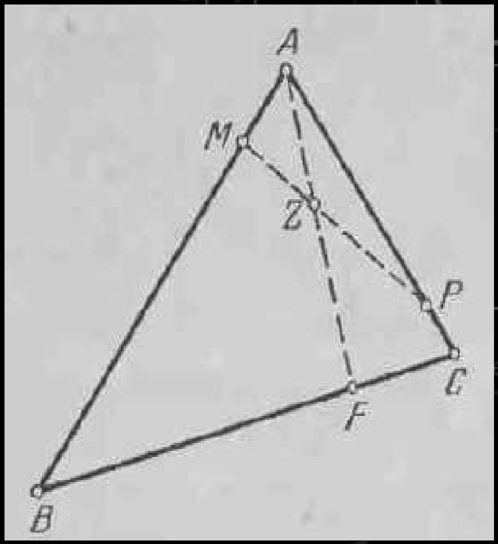


Пример: В треугольнике ABC точка F делит основание BC в отношении 3:1, считая от вершины B. Точки M и P отсекают от боковых сторон AB и AC по одной шестой, считая соответственно от вершины A и от вершины C. В каком отношении делится каждый из отрезков MP и AF точкой их пересечения.

Решение:
Загрузим в точку B массу 1, в точку C – массу 3.
Подберем для точки A такую массу x, чтобы точка M оказалась
Центром масс двух точек 1B и xA.
По правилу рычага 1 |BM|= x |MA|,
откуда x = |BM|: |MA|= 5.
Теперь для точки A подберем массу y так, чтобы точка P оказалась центром масс двух материальных точек
3C и yA. По правилу рычага имеем 3|CP|= y |PA|, откуда y = 3|CP|: |PA|= 0,6. Теперь рассмотрим систему
четырех точек 1B, 5A, 3C и 0,6A. Перенесем массы 1B и 5A в их центр масс M, а массы 3C и 0,6 A – в их центр P.
Тогда центр масс двух точек 6M и 3,6P. Если сгруппировать точки по другому, то Z окажется центром масс точек
5,6A и 4F. Следовательно центр масс – точка пересечения отрезков MP и AF.

ПРИМЕР РЕШЕНИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ БАРИЦЕНТРИЧЕСКИМ МЕТОДОМ

В треугольнике ABC точка F делит основание BC в отношении 3:1, считая от вершины B. Точки M и P отсекают от боковых сторон AB и AC по одной шестой, считая соответственно от вершины A и от вершины C.
В каком отношении делится каждый из отрезков MP и AF точкой их пересечения.



BF:FC=3:1 ⇒ (B; m); (C; 3m).

BM:MA=5:1 ⇒ (B;m) (A;5m)

CP:PA=1:5 и (C;3m) ⇒ (A;0.6m)

M – центр масс (B;m) и (A;5m)
F – центр масс (B;m) и (C;3m)
P- центр масс (A;0.6m) и (C;3m)

Z – центр масс (M;6m) и (P; 3.6m)
Z- центр масс (F;4m), A (5m) и A(0.6m)

MZ:ZP=3.6:6=3:5;
AZ:ZP=4:5.6=5:7.

ПРОБЛЕМА ИССЛЕДОВАНИЯ

Применение барицентрического метода требует введение искусственных допущений.

Согласуются ли результаты решения задачи барицентрическим методом на основе таких допущений с результатами применения метода взвешивания?

Какие геометрические задачи нельзя решить без применения барицентрического метода и метода взвешивания?

Цель исследования:

уточнить роль и место метода взвешивания в решении геометрических и прикладных задач.

Задачи исследования:

1. Описать область применения метода взвешивания в математике.
2. Экспериментально проверить достоверность применения барицентрического метода к решению геометрических задач.
3. Показать, что существуют геометрические или прикладные задачи, решение которых не возможно без привлечения метода взвешивания и барицентрического метода.

Методы исследования:

- Сравнительный анализ
- Эксперименты с вещественными аналогами геометрических фигур
- Аналитические рассуждения, доказательство

РЕЗУЛЬТАТЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ 1

Виды задач, решаемых методом взвешивания:

- логические задачи на взвешивание;
- задачи на определение особых точек в треугольнике;
- задачи на определение центра масс плоских фигур;
- задачи на пропорционального деление отрезков.

ПРИМЕР ЛОГИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ

Есть 12 монет, одна из которых фальшивая. При этом неизвестно, в какую сторону она отличается от настоящих, т.е. она может быть как легче, так и тяжелее. С помощью чашечных весов нужно за три взвешивания найти фальшивую монету, а также выяснить, тяжелее она или легче.

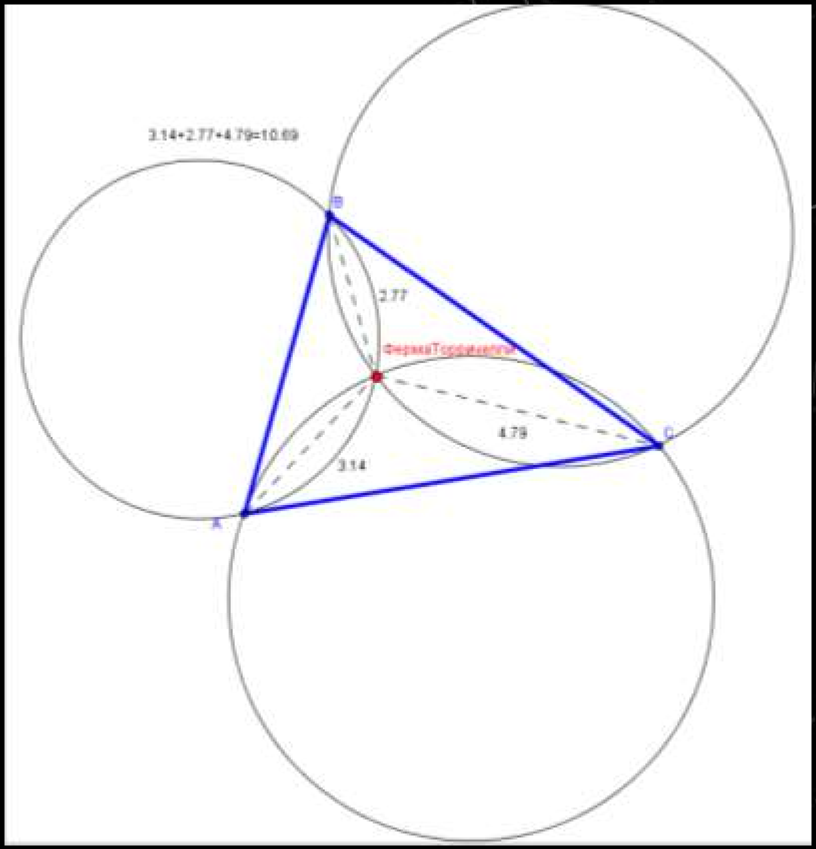
Решение : Для удобства пронумеруем монеты от 1 до 12.

I взвешивание: положим на чашки весов по четыре монеты: 1, 2, 3, 4 и 5, 6, 7, 8. Случай I: Весы в равновесии, значит фальшивая монета среди оставшихся четырёх. II взвешивание сравним три монеты 9, 10, 11 с заведомо настоящими 1, 2, 3. Если и в этот раз весы покажут равенство, то фальшивка - монета номер 12, и третьим взвешиванием мы сравним её с настоящей и узнаем, легче она или тяжелее. Если же три монеты 9, 10, 11 оказались легче (тяжелее), то третьим взвешиванием сравним друг с другом монеты 9 и 10. Если они равны, то монета 11 - фальшивая, и она легче (тяжелее) настоящей. Иначе заключаем, что из монет 9 и 10 фальшивая та, которая легче (тяжелее) другой.

Случай II: Весы не в равновесии. Например монеты 1, 2, 3, 4 тяжелее, чем 5, 6, 7, 8 (другой симметричен).
II взвешивание: на одной чаше монеты 1, 2, 5, а на другой - монеты 3, 4, 9 (монета 9 - заведомо настоящая).
Если равенство, то одна из монет 6, 7, 8 легче остальных.
III взвешивание: сравним монеты 6 и 7. Если они равны, то монета 8 легче остальных. Иначе фальшивой является та, которая легче другой.
Если во II взвешивании неравенство, пусть монеты 1, 2, 5 оказались тяжелее, чем 3, 4, 9. Следовательно, фальшивка среди монет 1 и 2, причём она тяжелее остальных.
III взвешивание: сравним эти две монеты друг с другом, определили фальшивую.
Если во II взвешивании монеты 1, 2, 5 оказались легче, чем 3, 4, 9. Следовательно, либо монета 5 легче остальных, либо одна из монет 3 и 4 тяжелее остальных. III взвешивание: сравним друг с другом монеты 3 и 4 и найдём ответ.

ПРИМЕР ЗАДАЧ НА ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОСОБЫХ ТОЧЕК ТРЕУГОЛЬНИКА

Пусть дан треугольник ABC все углы которого не превосходят 120°. Найти точку внутри этого треугольника сумма расстояний от которой до вершин треугольника минимальная (точка Ферма-Торричелли).



Справка:

Точка Торричелли - точка, из которой все стороны треугольника видны под углом 120°.

Точка Ферма – точка, сумма расстояний от которой до вершин треугольника минимальная.

Они совпадают для треугольников, все углы которого не превосходят 120°.

ПОИСК МЕТОДОМ ВЗВЕШИВАНИЯ

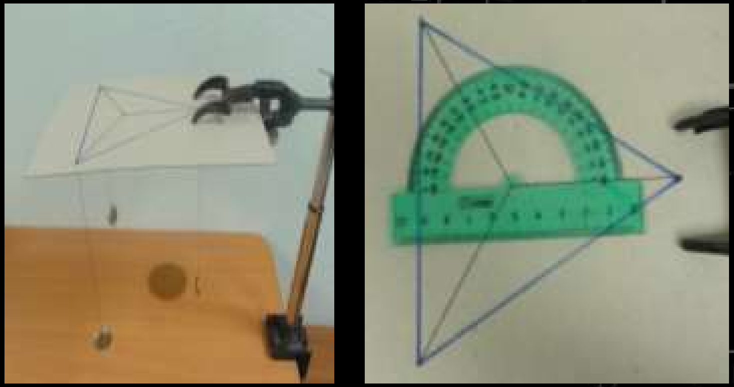
Для эксперимента нам потребуются: плотный картон, нитки, штатив, грузики одинаковой массы, транспортир, линейка, карандаш.

Отметим на плоской гладкой горизонтальной поверхности точки A, B и C и просверлим в отмеченных местах сквозные отверстия.

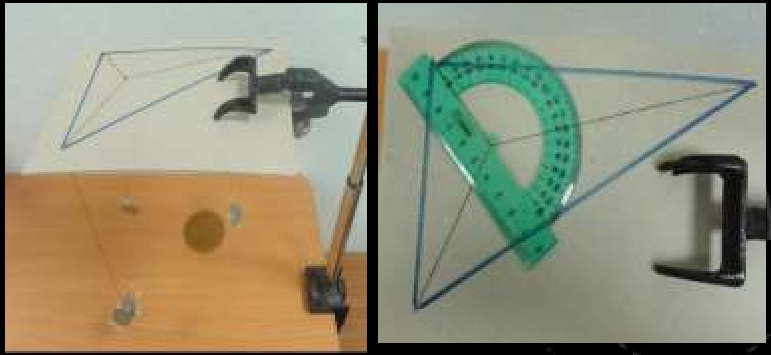
Свяжем три нити и пропустим сверху их свободные концы через отверстия.

Привяжем к свободным концам грузики одинаковой массы.

Когда система придет в равновесие, узел окажется в точке Ферма для треугольника ABC.



Для правильного треугольника



Для произвольного остроугольного треугольника

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Система в равновесии, следовательно:
$\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} + \overrightarrow{F_3} = \vec{O}$

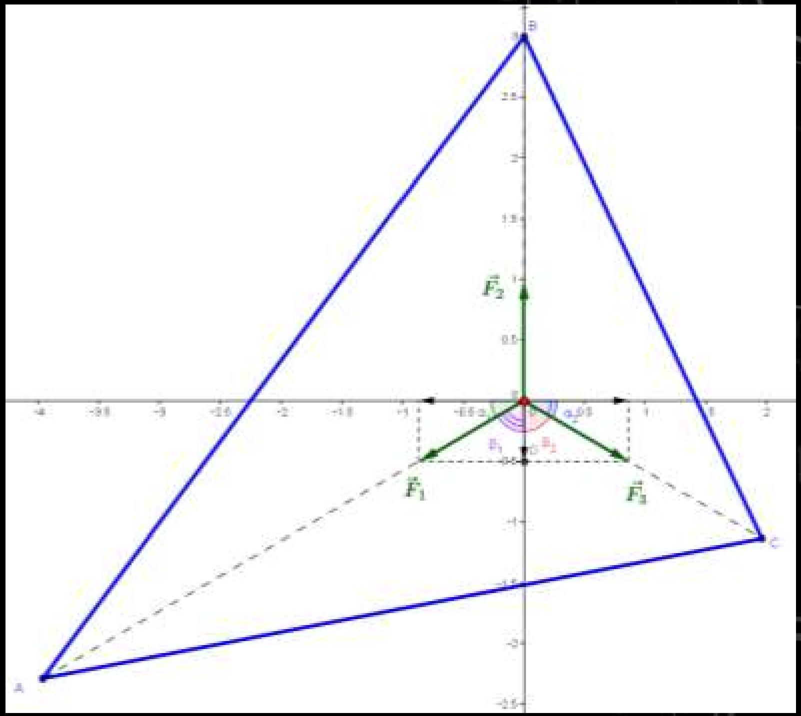
Ox: $mgcos\alpha_1 = mgcos\alpha_2$ $\qquad$ $\alpha_1 + \beta_1 = 90^\circ$

Oy: $mgcos\beta_1 + mgcos\beta_2 = mg$ $\qquad$ $\alpha_2 + \beta_2 = 90^\circ$

$cos\alpha_1 = cos\alpha_2 \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2$

$\cos(90^\circ - \alpha_1) + cos(90^\circ - \alpha_2) = 1$

$sin\alpha_1 = 0.5 \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = 30^\circ \Rightarrow \beta_1 = \beta_2 = 60^\circ$



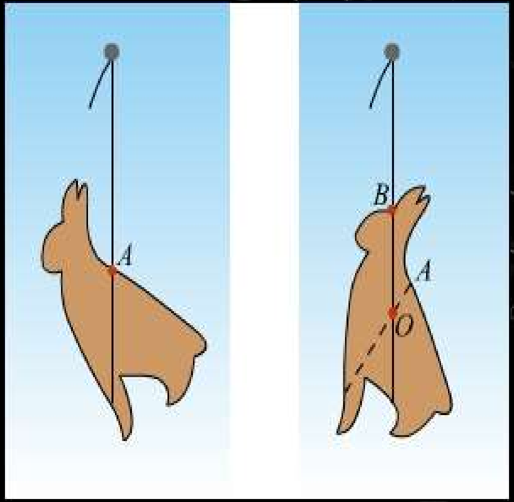
Результат решения задачи 2 (экспериментальная проверка барицентрического метода)

Из курса геометрии известны следующие утверждения:

Центром масс отрезка является его середина.

Центром масс треугольника является точка пересечения его медиан (центроид).

Центром масс параллелограмма является точка пересечения диагоналей.

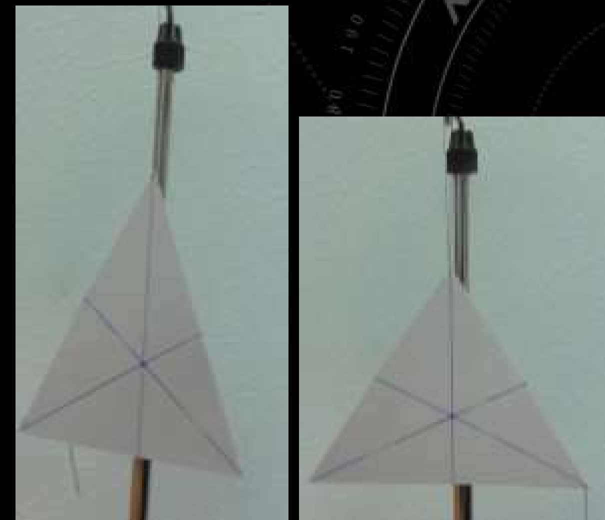


Проверим, к таким же выводам приводят метод взвешивания и барицентрический метод или нет.

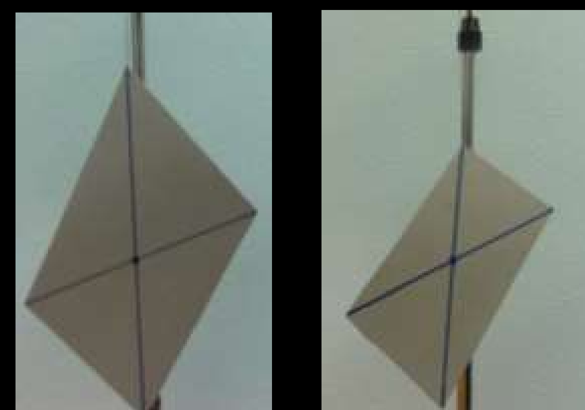
РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ МЕТОДОМ ВЗВЕШИВАНИЯ

Для эксперимента нам потребуются:
плотный картон,
нитки, штатив, линейка, карандаш.

Ход эксперимента: фигура подвешивается на нитке за различные точки. Направление нитки на которой подвешена фигура, будет давать направление силы тяжести. Точка пересечения этих направлений определяет центр тяжести фигуры.



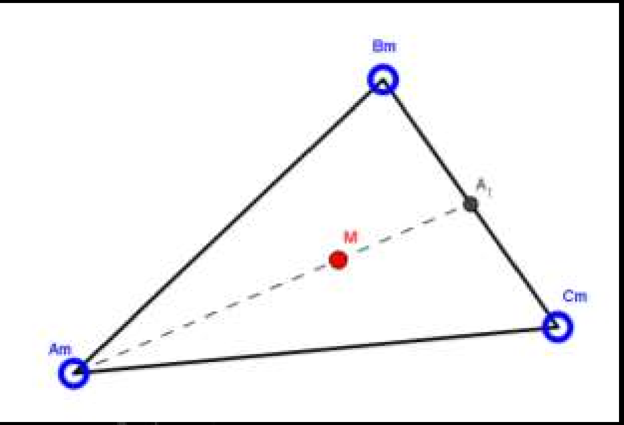
Для треугольника – точка пересечения медиан



Для параллелограмма – точка пересечения диагоналей

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО С ПРИМЕНЕНИЕМ БАРИЦЕНТРИЧЕСКОГО МЕТОДА

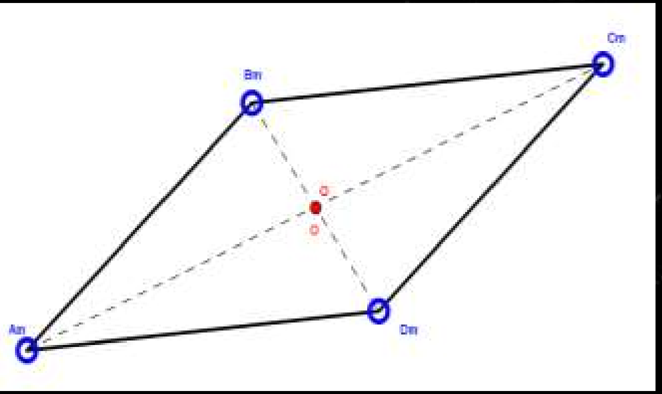
- Допустим, что вся масса треугольника и параллелограмма сосредоточена в их вершинах и равномерно в них распределена, то есть
- треугольник ABC – система материальных точек (A;m), (B;m); (C;m);
- параллелограмм ABCD - система материальных точек (A;m), (B;m); (C;m); (D;m).



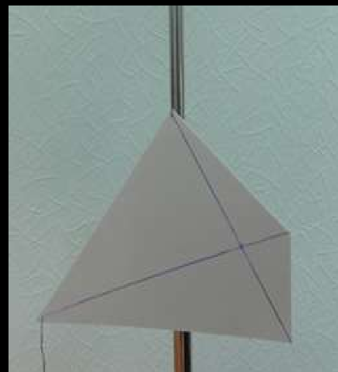
$AM \cdot m = A_1M \cdot 2m$

$AM : A_1M$=2:1

$(Q; 2m) = (O; 2m)$

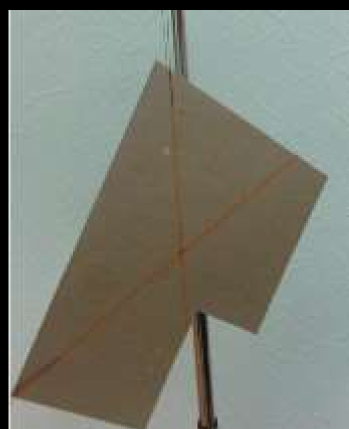


МЕТОД ВЗВЕШИВАНИЯ



Для произвольного четырехугольника
Точка пересечения диагоналей

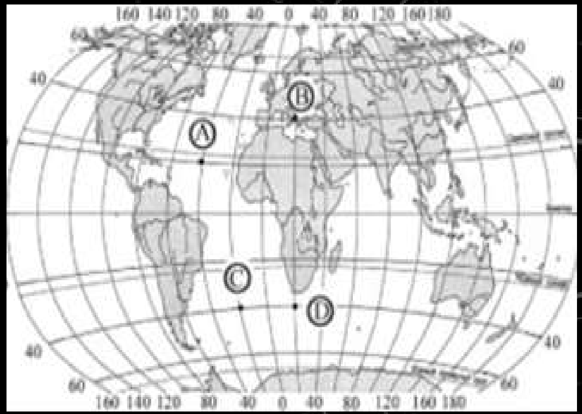
Для произвольной фигуры



Для произвольного многоугольника

Для невыпуклого многоугольника

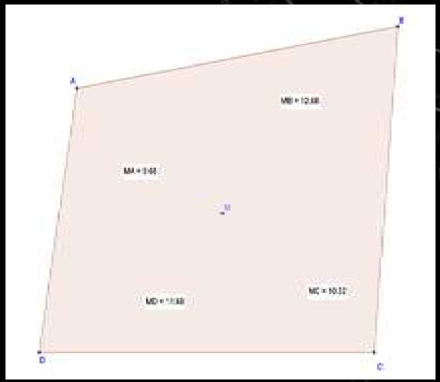
РЕЗУЛЬТАТ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ 3



Задача «Где построить аэропорт?»

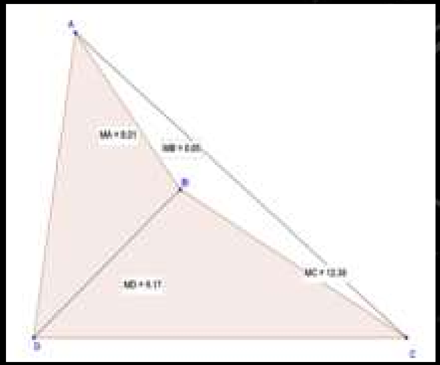
Мэры четырех городов подписали соглашение о строительстве общего аэропорта, так, чтобы он удовлетворял потребности всех городов. Каково должно быть расположение аэропорта, так чтобы он мог обсуживать города наилучшим образом? Зависит ли выбор места строительства аэропорта от: а) взаимного расположения городов **[4]**;

б) от соотношения населения этих городов?



Экспериментируя с динамической моделью четырёхугольника, предполагаем:

а) В любом выпуклом четырехугольнике точка, суммарное расстояние от которой до его вершин минимально – это точка пересечения его диагоналей. В невыпуклом четырехугольнике эта точка – вершина наибольшего угла.



б) Выбор места строительства аэропорта зависит от соотношения населения в этих городах. Определить его можно с помощью нахождения центра масс четырехугольника правилом рычага.

ЭКСПЕРИМЕНТ

б) Для эксперимента нам потребуется:
1) плотный картон; 2) набор гирь разной массы;
3) штатив для закрепления фигуры; 4) нить для подвеса гирь;
5) инструмент для того, чтобы проделать отверстия в вершинах четырехугольника.

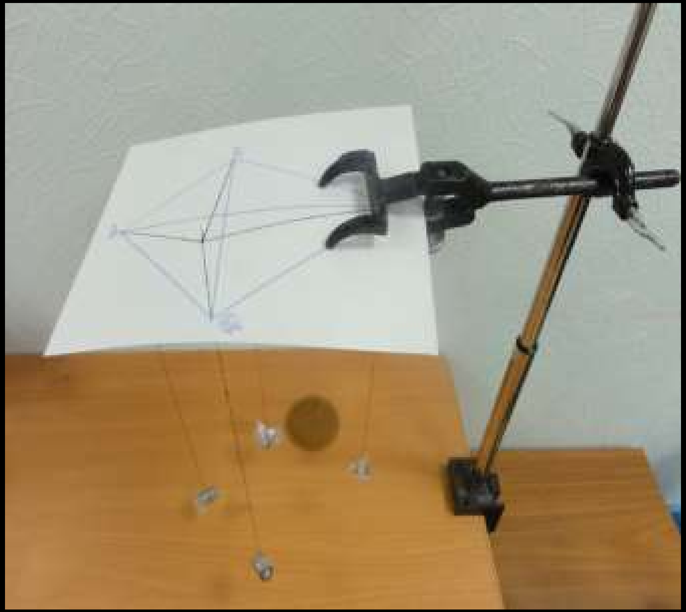
Ход эксперимента:

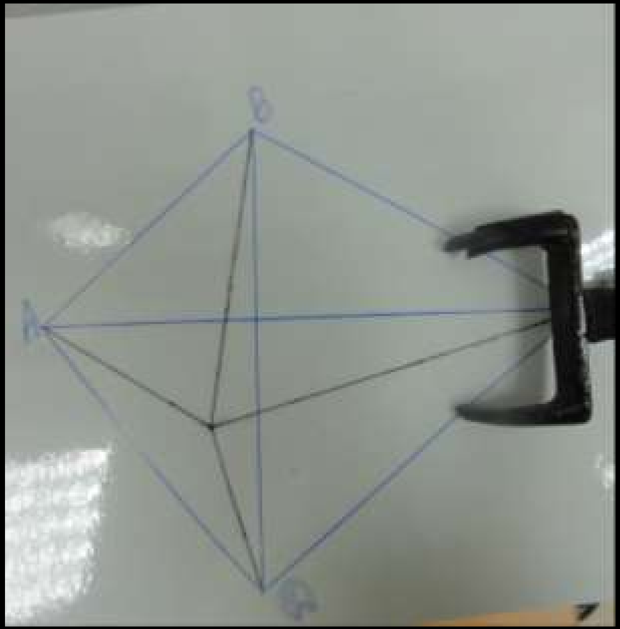
Построить на плотном картоне произвольный выпуклый четырехугольник. Проделать в его вершинах отверстия. Продеть через них четыре нити и связать их. К свободным концам будем привязывать грузики разной массы, например:

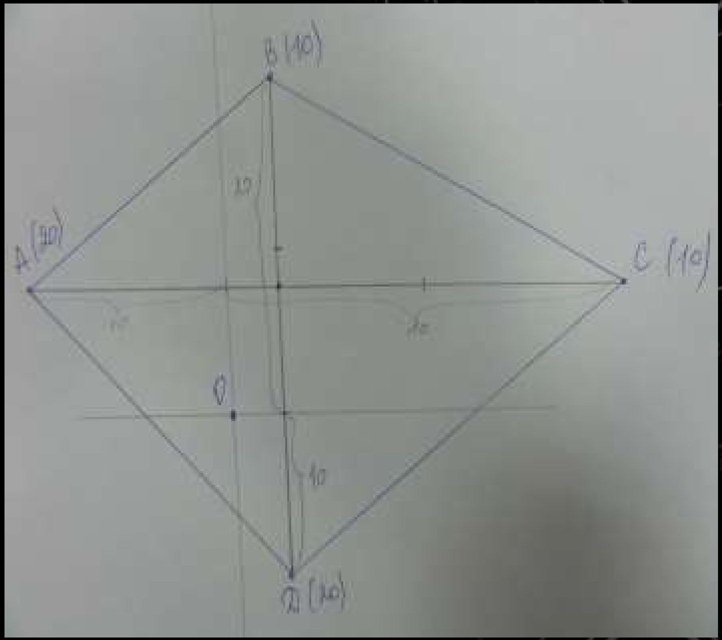
1) В точку А гирьку 20 г, В – 10 г, С - 10 г, Д – 20 г;
2) А – 10, В – 10, С – 20, Д – 20;
3) А – 10, В – 20, С – 20, Д – 10;
4) А – 15, В – 20, С – 20, Д – 5.

Картонку закрепить зажимом в штатив горизонтально так, чтобы грузы были в подвешенном состоянии и их было удобно менять, когда система придет в равновесие, узел окажется в центре масс четырехугольника с учетом подвешенного груза.

1 СЛУЧАЙ: А - 20 Г, В – 10 Г, С - 10 Г, Д – 20Г

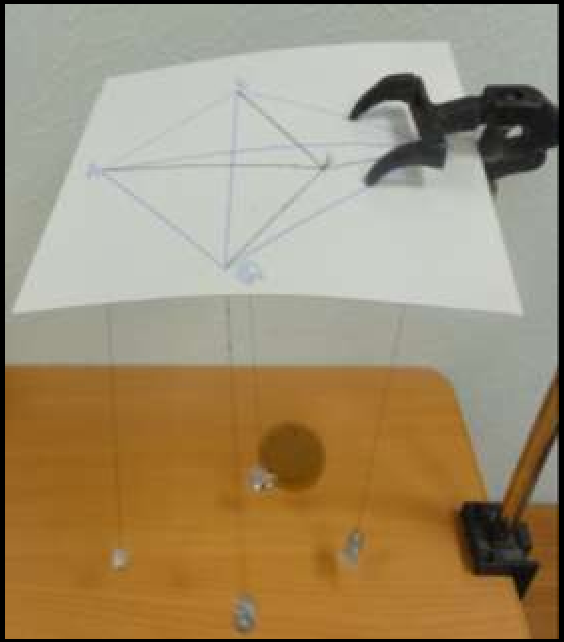


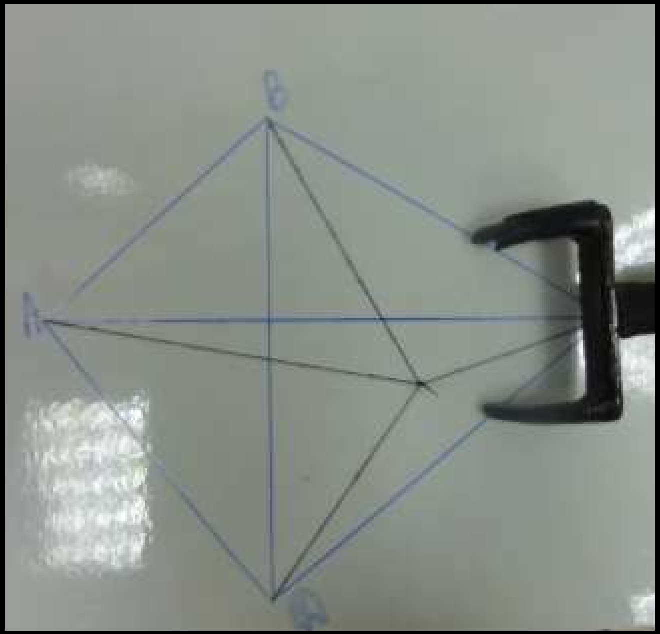


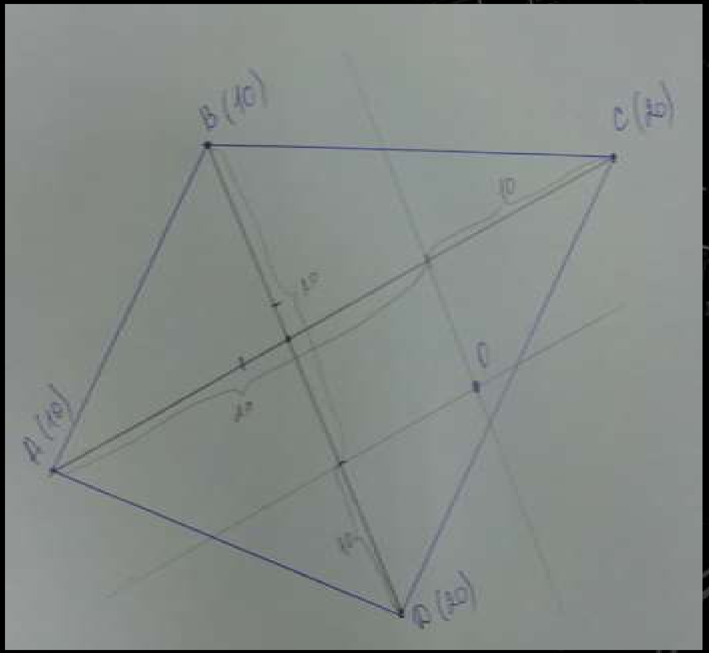


Эксперимент подтверждаем геометрическим построением, с помощью правила рычага $l_1 / l_2 = P_2 / P_1$
определяем нового центра масс (точки О)

2 СЛУЧАЙ: А – 10, В – 10, С – 20, Д – 20

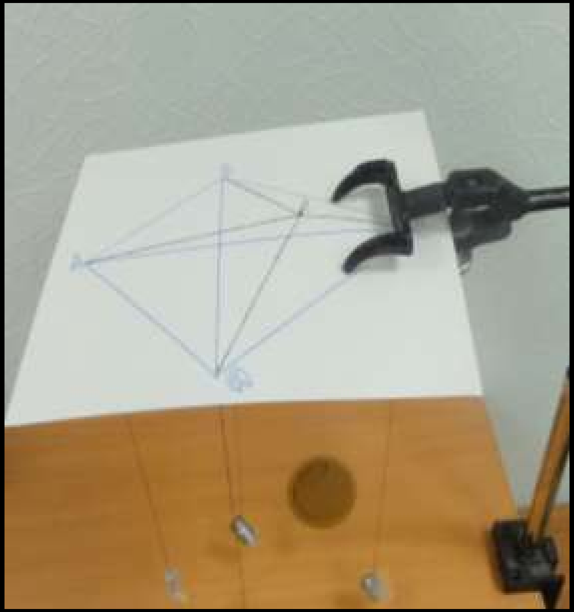


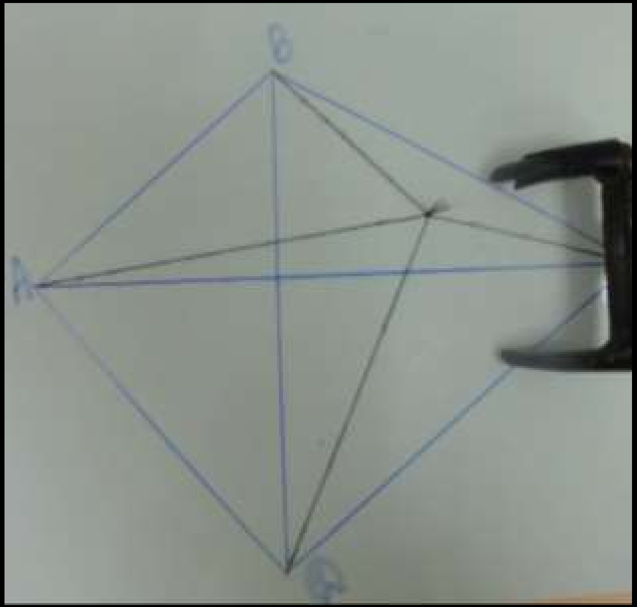


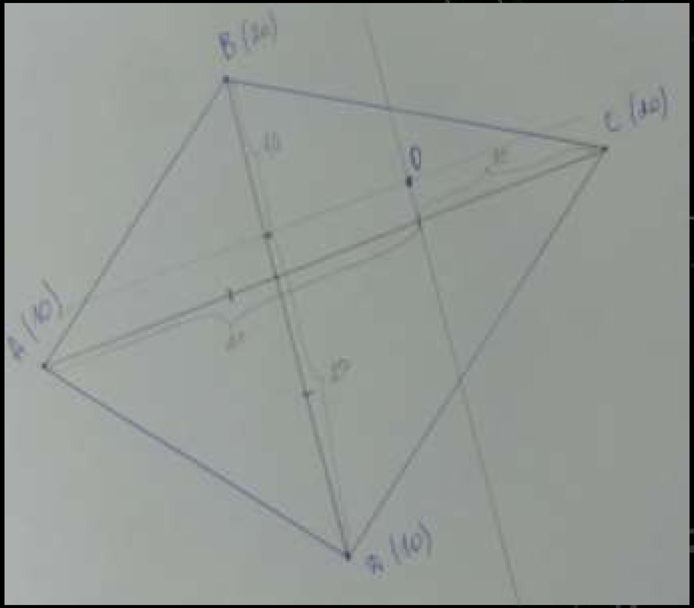


Эксперимент подтверждаем геометрическим построением, с помощью правила рычага $l_1 / l_2 = P_2 / P_1$ определяем нового центра масс (точки О)

3 СЛУЧАЙ: А – 10, В – 20, С – 20, Д – 10

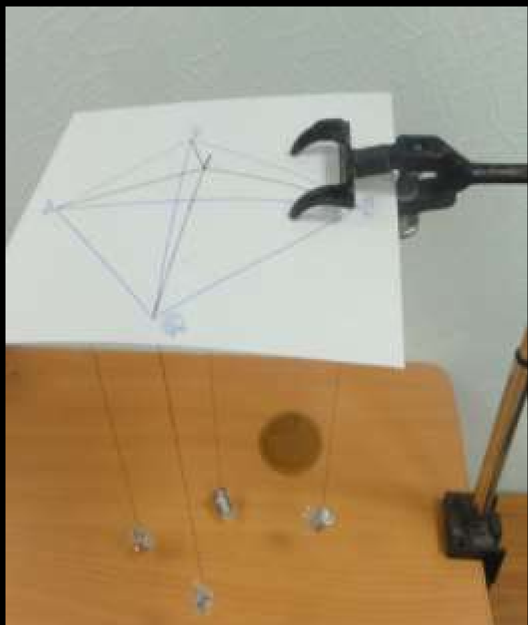


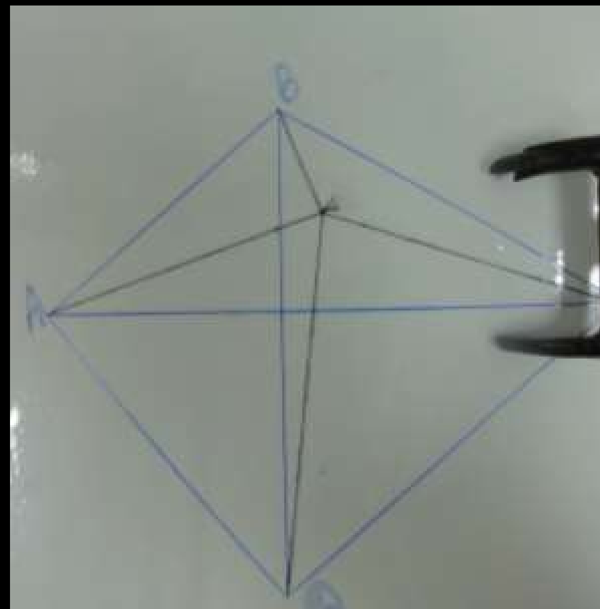


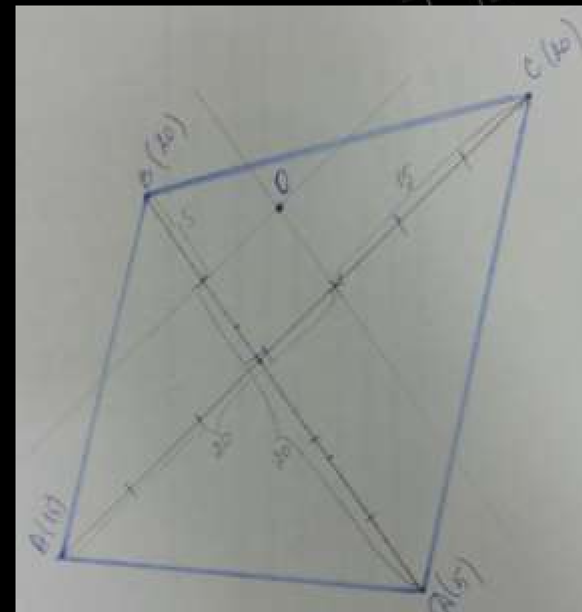


Эксперимент подтверждаем геометрическим построением, с помощью правила рычага $l_1 / l_2 = P_2 / P_1$ определяем нового центра масс (точки О)

4 СЛУЧАЙ: А – 15, В – 20, С – 20, Д – 5

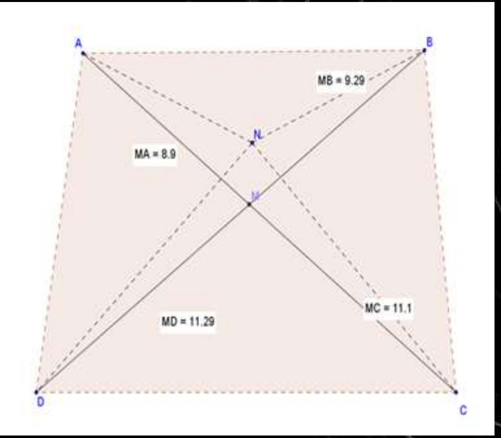




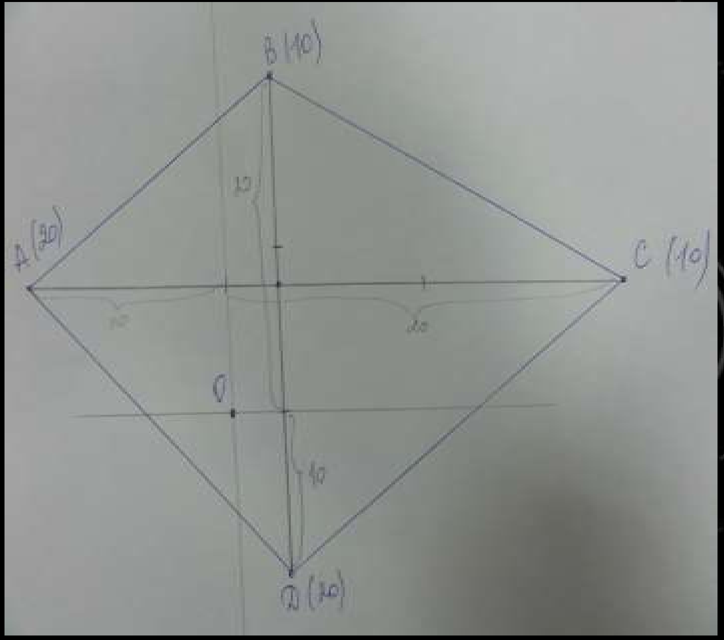


Эксперимент подтверждаем геометрическим построением,
с помощью правила рычага $l_1 / l_2 = P_2 / P_1$
определяем нового центра масс (точки О)

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО



а) По неравенству треугольника DN+NB не меньше диагонали DB, а сумма расстояний AN+NC не меньше AC. Поэтому минимум суммы расстояний равен AC+BD и достигается в точке пересечения диагоналей.



б) Правило рычага l1 / l2 = P2 / P1 позволяет определить положение точки на диагонали, через которую необходимо провести перпендикулярную прямую к диагонали. Точка пересечения двух перпендикуляров есть новый центр масс четырехугольника.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ИССЛЕДОВАНИЯ

Введено понятие метода взвешивания.
Определены четыре типа задач, которые можно решить этим методом:

- Логические задачи на взвешивание
- Определение положения точки Ферма (или Торричелли) в остроугольном треугольнике
- Определение центра масс различных геометрических фигур
- Определение центра масс геометрической фигуры при изменении массы в её вершинах с помощью правила рычага

Экспериментально проверена адекватность барицентрического метода.
Доказано существование задачи, решение которых требует применения этих методов.

ИСТОЧНИКИ ИНФОРМАЦИИ

1. *Атанасян Л.С., Бутузов В.Ф., Кадомцев С.Б. Геометрия. Учебник для 7- 9 классов -М. : Просвещение, 2011*
2. *Официальный сайт Турнира по экспериментальной математике http://itprojects.narfu.ru/turnir/task.php*
3. *Центр тяжести в геометрических задачах http://files.school-collection.edu.ru/dlrstore*
4. *Problem Solving and Problem Posing in a Dynamic Geometry EnvironmentConstantinos Christou, Nicholas Mousoulides, MariosPittalis&Demetra Pitta-Pantazi - University of Cyprus (Cyprus)- TMME, vol2, no.2, p.125*
5. *И.М. Смирнова, В.А. Смирнов ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ПО ГЕОМЕТРИИ www.geometry2006.narod.ru/Problems*
6. *И.М. Смирнова, В.А. Смирнов ЗАМЕЧАТЕЛЬНЫЕ ТОЧКИ И ЛИНИИ ТРЕУГОЛЬНИКА, режим доступа: http://www.geometry2006.narod.ru/Art/Lecture1.htm*